ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14
ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

I.

Пример 1. Опыт состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Обозначим через X число очков, выпавших на верхней грани кости. Описать множество элементарных исходов Ω и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A=\{X - \textit{кратно трем}\},\ \ B=\{X - \textit{нечетно}\},\ \ C=\{X>3\},$$

$$D=\{X<7\},\ E=\{X - \textit{дробно}\},\ \ F=\{0{,}5<X<1{,}5\}.$$

Выявить пары совместных событий.

Решение

Введем обозначения для следующих наблюдаемых в данном опыте событий:

$$\omega_k=\{X=k\},\ k=1,2,...,6;$$

$$\omega^{(1)}=\{X - \textit{нечетное число}\};\ \ \omega^{(2)}=\{X - \textit{четное число}\}.$$

На базе данных исходов можно сконструировать два достоверных события:

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\} \text{ и } \Omega_2=\{\omega^{(1)},\omega^{(2)}\}.$$

Какое из них больше подходит в качестве множества элементарных исходов? Ясно, что Ω_2 следует «забраковать», поскольку, например, наблюдаемые события $\omega_1,\omega_2,...,\omega_6,$ $A,$ $B,$ $D,$ E не являются подмножествами множества Ω_2. С другой стороны, все перечисленные события могут быть описаны как подмножества множества Ω_1. Действительно,

$$A=\{\omega_3,\omega_6\},\ \ B=\omega^{(1)}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\},\ \ C=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\},$$

$$D=\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\},\ E=\varnothing,\ F=\{\omega_1\}.$$

Из написанных равенств, в частности, усматриваем, что исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ разложимы на элементы, которые сами являются исходами данного опыта. Таким образом, исходы $\omega_1,\omega_2,...,\omega_6$ более «элементарны», чем исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и $B,$ A и $C,$ A и $D,$ B и $C,$ B и $D,$ B и $F,$ C и $D,$ D и F.

Пример 2. Опыт состоит в радиолокационном обнаружении воздушной цели. Наблюдаемый результат - положение светящегося пятна (отраженного импульса от цели) на экране индикатора цели, имеющего форму круга радиуса 10 см, в системе декартовых координат с началом, совпадающим с центром экрана. Описать множество элементарных исходов и состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A=\{\textit{цель находится в первом квадранте}\};$$

$$B=\left\{\begin{matrix}\textit{цель находится в круге радиуса } 5 \textit{ см, центр} \\ \textit{которого совпадает с центром экрана}\end{matrix}\right\};$$

$$C=\left\{\begin{matrix}\textit{цель находится в круге радиуса } 2{,}5 \textit{ см, центр которого сдви}- \\ \textit{нут на } 5 \textit{ см вдоль оси } Ox \textit{ в отрицательном направлении}\end{matrix}\right\}.$$

Совместны ли пары событий A и B, A и C, B и C?

Решение

Все интересующие нас в данном опыте наблюдаемые события связаны с регистрацией положения светящегося пятна на экране индикатора, Удобной формой математического описания элементарного исхода являются в данном случае координаты случайной точки на плоскости, соответствующей, например, центру пятна (предполагается, что пятно представляет собой круг достаточно малого радиуса). Хотя очевидно, что точку (как абстрактное математическое понятие) наблюдать физически на экране индикатора невозможно, тем не менее такой идеализированный способ описания элементарного исхода упрощает математическую формализацию модели данного опыта.

Таким образом, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде

$$\Omega=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 100\}.$$

Подмножества, равносильные указанным событиям, имеют вид :

$$A=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 100,\ x>0,\ y>0\};$$

$$B=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 25\};$$

$$C=\{(x,y):\ (x+5)^2+y^2\le 6{,}25\}.$$

По определению, события совместны, если соответствующие им подмножества имеют общие элементы (пересекаются), и несовместны в противном случае. Поэтому события A и B, B и C совместны, а события A и C несовместны.

Пример 3. Рассмотрим следующий случайный опыт: матч на первенство страны по футболу между командами «Пахтакор» и «Бунёдкор». Интересующие нас события:

$$A=\{\textit{выграла команда "Пахтакор"}\};$$

$$B=\{\textit{игра закончилась победой одной из команд}\};$$

$$C=\{\textit{игра закончилась со счетом } 3:1 \textit{ впользу "Бунёдкор"}\};$$

$$D=\{\textit{в игре забито неменьше трех голов}\}.$$

Требуется описать множество элементарных исходов и указать состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

Решение

Очевидно, что описанный опыт не удовлетворяет требованию воспроизводимости при неизменном комплексе условий, поскольку условия проведения матча меняются от игры к игре. Поэтому построение вероятностной модели исходов футбольного матча возможно лишь при определенной идеализации реальных условий. Предположим, что такая модель существует. Спрашивается, что представляет собой результат (элементарный исход) данного опыта? Ответ зависит от того, какой круг событий мы собираемся наблюдать (регистрировать) в данном опыте. События, перечисленные в условии задачи, определяют круг интересов обычного «болельщика» за ту или иную команду. Для полного и однозначного описания всех указанных событий достаточно принять в качестве элементарного исхода конечный счет в матче.

Запишем множество Ω следующим образом:

$$\Omega = \left\{ \omega = (x, y):\ x \in \mathbb{Z}_0,\ y \in \mathbb{Z}_0 \right\},$$

где x - количество голов, забитых командой «Пахтакор», y - количество голов, забитых командой «Бунёдкор», $\mathbb{Z}_0$ - множество неотрицательных целых чисел.

Мы вынуждены считать множества возможных значений x и y, по крайней мере, теоретически - неограниченными, поскольку до игры нет никаких оснований для того, чтобы установить явную точную границу возможного счета. Практически, конечно, бесконечно большой счет ни в какой игре не осуществим.

Подмножества, соответствующие интересующим нас событиям, имеют следующий вид:

$$A = \left\{ (x, y):\ x \in \mathbb{Z}_0,\ y \in \mathbb{Z}_0,\ \ x > y \right\}, \quad B = \left\{ (x, y):\ x \in \mathbb{Z}_0,\ y \in \mathbb{Z}_0,\ \ x \neq y \right\},$$

$$C = \left\{ (x, y):\ x = 1,\ y = 3 \right\} = \left\{ (1, 3) \right\}, \quad D = \left\{ (x, y):\ x \in \mathbb{Z}_0,\ y \in \mathbb{Z}_0,\ \ x + y \geq 3 \right\}.$$

Заметим, что для другого «экспериментатора», - например, для тренера команды «Пахтакор» - может оказаться более важным предметом наблюдения не конечный счет матча, а количество травмированных или оштрафованных игроков. В этом случае придется строить другое множество элементарных исходов, а следовательно, и другую вероятностную модель футбольного матча.

Упражнения

В задачах 1- 6 простроить множество элементарных исходов Ω по описанию опыта и указанных подмножеств, соответствующие указанным событиям

1. Игральная кость подбрасывается дважды. Наблюдаемый результат - пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших в первый и второй раз. События:

А = {оба раза выпало число очков, кратное трем},

В = {ни разу не выпало число шесть},

C = {оба раза выпало число очков, большее трех},

D = {оба раза выпало одинаковое число очков}.

2. Монета подбрасывается три раза. Наблюдаемый результат - появление герба (г) или цифры (ц) на верхней стороне - монеты. События:

A = ={герб выпал ровно один раз},

B = {ни разу не выпала цифра},

C = {выпало больше гербов, чем цифр},

D = {герб выпал не менее, чем два раза подряд}.

3. Монета подбрасывается до первого появления герба. Наблюдаемый результат - общее число подбрасываний. События:

A = {герб выпал при третьем подбрасывании},

B = {герб выпал не ранее, чем при третьем подбрасывании).

4. Производится стрельба по плоской прямоугольной мишени: $-2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$. Наблюдаемый результат - координаты точки попадания в декартовой системе координат. По условиям стрельбы непопадание в указанный прямоугольник исключено. События:

A = {абсцисса точки попадания не меньше ординаты},

B = {произведение координат точки неотрицательно},

C = {сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу}.

Выявить пары совместных событий.

5. На отрезке $[a,b]$ наудачу ставится точка. Пусть x координата этой точки. Затем на отрезке $[a, x]$ наудачу ставится еще одна точка с координатой y. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y). События:

A = {вторая точка ближе к правому концу отрезка $[a,b]$, чем к левому},

B = {расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка),

C = {первая точка ближе к левому концу отрезка $[a,b]$, чем к правому},

D = {первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка $[a,b]$}.

Выявить пары несовместных событий.

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x - время прихода Петра, y - время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). События:

A = {Петр пришел после 11 ч 45 мин},

B = {Петр пришел после Ивана),

C = {Иван пришел до 11ч 45 мин),

D = {встреча не состоялась),

E = {Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался),

F = {Ивану не пришлось ждать Петра},

K ={встреча состоялась когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

Примеры

1. Пусть при бросании игральной кости событие A означает, что выпадет четное число очков, а событие B - что количество очков не превзойдет четырех. Ясно, что

$$A=\{2,4,6\};\ B=\{1,2,3,4\};\ (A+B)=\{1,2,3,4,6\};\ (AB)=\{2,4\}.$$

Иными словами, событие $A+B$ наступает при выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 6, а событие AB- при выпадении чисел 2, 4.

Для событий $\overline{A},\quad \overline{B},\quad \overline{A+B},\quad \overline{AB}$, противоположным соответственно к событиям$A,\quad B,\quad A+B,\quad AB$, получим

$$\overline{A}=\{1,3,5\};\overline{B}=\{5,6\};\left(\overline{A+B}\right)=\{5\};\ \left(\overline{AB}\right)=\{1,3,5,6\}.$$

2. Пусть при игре в спортлото события $A,\ B, C$ заключаются в том, что выбранная в результате опыта шестерка чисел содержит соответственно число 7, 12, 20. Результатом испытания оказалась шестерка чисел 7, 8, 9, 20, 21, 42. Какие из следующих событий наступили при этом:

$$A,\quad B,\quad C,\qquad \overline{A},\quad \overline{B},\quad \overline{C},\qquad ABC,\quad A+B,\quad A+C,\qquad \overline{A+C}\ ?$$

Решение

Обозначим множество {7, 8, 9, 20, 21, 42} через M. Тогда получим, что из перечисленных в условии событий наступили следующие: A, поскольку $7\in M$; C , так как $20\in M$; $\overline{B},$ поскольку $12\notin M$; $A+B$, так как $7\in M$; $A+C$, поскольку $7\in M$ и $20\in M$. Остальные из перечисленных событий не наступили.

В алгебре событий справедливы формулы

$$\overline{A_1+A_2+...+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}, \qquad (*)$$

$$\overline{A_1\cdot A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+...+\overline{A_n}. \qquad (**)$$

Строгий вывод этих формул мы опускаем. Здесь мы ограничимся лишь некоторым пояснением к ним. Левая часть формулы (*) есть событие, противоположное к $A_1+A_2+...+A_n$. Последнее событие наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из $A_i\quad (i=1,2,...,n)$. Событием, противоположным тому, что наступит хотя бы одно из A_i, является событие, состоящее в том, что не наступит ни одно из A_i т.е. наступит каждое из $\overline{A_i}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$.

Левая часть формулы (**) есть событие, противоположное событию $A_1\cdot A_2\cdots A_n$. Последнее событие состоит в том, что наступит каждое из событий $A_1, A_2,...,A_n$. Событием, противоположным тому, что наступит каждое из

$A_i \quad (i=1,2,...,n)$, является событие, состоящее в том, что не наступит хотя бы одно из $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$, т. е. что наступит хотя бы одно из $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}$.

Пример 3. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а) Какое событие является противоположным к событию A: «хотя бы один стрелок попал в цель»?

б) Какое событие противоположно событию «каждый из стрелков попал в цель?»

Решение

а) Таким событием является «каждый из стрелков промахнулся» или, что то же самое, «ни один не попал в цель». Справедливость ответа вытекает из того, что событие A означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ - непоражение мишени. Этот пример иллюстрирует формулу (*).

б) Таким событием является «хотя бы один из стрелков промахнулся». Этот пример иллюстрирует формулу (**).

Пример 4. Игральная кость подбрасывается один раз. Наблюдаемый результат - число очков на верхней грани. События A, B, C, D, E, F описаны в примере 1, из п. 2 данного параграфа. Описать состав и выяснить смысл следующих событий: $E_1 = \overline{B}$, $E_2 = \overline{C}$, $E_3 = AB$, $E_4 = A + B$, $E_5 = A - B$, $E_6 = E + D$, $E_7 = EF$.

Решение

В обозначениях примера 1 напишем состав указанных событий, используя определение соответствующей алгебраической операции:

$E_1 = \{\omega_{2,} \omega_4, \omega_4\} = \{\textit{выпало четное число очков}\}$;

$E_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\textit{выпало число очков, небольше трех}\}$;

$E_3 = \{\omega_3\} = \{\textit{выпшее число очков,нечетно и кратно трем}\}$;

$E_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\} = \{\textit{выпавшее число очков или нечетно, или}$

$\textit{тремкратно трем}\}$;

$E_5 = A\overline{\overline{B}} = AB - E_3$; $\quad E_6 = \varnothing + D = D = \Omega$.

Пример 5. Рассмотрим снова случайный эксперимент, описанный в примере 2. Как уже говорилось, множество идеализированных элементарных исходов

$$\Omega = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100\}$$

является удобной формой математического описания наблюдаемых событий, связанных с положением на экране индикатора светящегося пятна - отраженного импульса от цели. Пусть наблюдения в данном опыте состоят в регистрации факта принадлежности светящегося пятна произвольно выбранному участку круга, имеющему площадь. Например, проверяется результат: попадает ли отраженный импульс от цели в некоторую часть кольца, ограниченную радиусами r_1 и r_2 и полярными углами φ_1 и φ_2. Составляет ли множество всех квадрируемых подмножеств множества Ω алгебру событий?

Решение

Из интегрального исчисления известно, что объединение, пересечение и дополнение конечного или счетного числа квадрируемых, подмножеств некоторого квадрируемого множества на плоскости являются квадрируемыми множествами. Отсюда следует, что система квадрируемых подмножеств множества Ω образует алгебру для данного опыта.

Упражнения

В задачах 1-2 требуется по описанию опыта построить множество элементарных исходов и выявить состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

1. Пусть А, В, С - три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить в алгебре событий следующие события:

E_1 = {из трех событий A, B, C произойдет ровно одно},

E_2 = {из трех событий A, B, C произойдет хотя бы одно},

E_3 = {из трех событий A, B, C произойдет ровно два},

E_4 = {из трех событий A, B, C произойдет не меньше двух},

E_5 = {из трех событий A, B, C не произойдет ни одного},

E_6 = {из трех событий A, B, C произойдет хотя бы два},

E_7 = {из трех событий A, B, C не произойдет хотя бы одно}.

2. Произведено три выстрела из орудия по цели. Событие A_k = {попадание при k-м выстреле} (k = 1,2, 3).

а) Выяснить состав множества Ω, выразив каждый элементарный исход ω_i, через события A_k,

б) Записать в алгебре событий следующие события:

A = {ровно одно попадание},

B = {хотя бы одно попадание},

C = {хотя бы один промах},

D = {не меньше двух попаданий},

E = {попадание не раньше, чем при третьем выстреле}.

Примеры

1. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию?

Решение

Петя может доехать до института $l_1 = 5$ различными способами (на одном из пяти автобусов), при этом Маше остаётся только $l_2 = 4$ способа (так как один из автобусов занят Петей). Таким образом, по правилу произведения у Пети и Маши есть $l_1 l_2 = 5 \cdot 4 = 20$ различных способов добраться до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию.

2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение

Начальник управления может отобрать одного аналитика $l_1 = 3$ способами, одного программиста - $l_2 = 10$ способами, а одного инженера - $l_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить .любого из своих сотрудников, согласно правилу суммы у него существует $l_1 + l_2 + l_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы.

3. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять десять охранников по десяти постам. В целях усиления безопасности одна и та же комбинация расстановки охранников по постам не может повторяться чаще одного раза в месяц. Чтобы оценить, возможно ли это, найти число различных комбинаций расстановки охранников.

Решение

Первый способ. На первый пост начальник службы безопасности может назначить любого из $l_1 = 10$ охранников, на второй пост - любого из оставшихся $l_2 = 9$ охранников и так до девятого поста, на который можно назначить любого из оставшихся $l_9 = 2$ охранников, при этом оставшийся $l_{10} = 1$ охранник будет назначен на десятый пост. Поэтому, согласно правилу произведения, у начальника службы безопасности есть

$$l_1 l_2 \cdots l_{10} = 10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$$

способов расстановки охранников по постам. Поскольку количество дней в месяце не превышает 31, у начальника службы безопасности заведомо существует достаточное число способов расстановки своих подчинённых по постам.

Второй способ. Число способов расстановки десяти охранников по десяти постам, существующих у начальника службы безопасности, описывается числом перестановок из 10 элементов, т. е. $P_{10} = 10! = 3628800$.

Упражнение

Определить, сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга.

Пример 4. Новый президент банка должен назначить двух новых вице-президентов из числа десяти директоров. Сколько способов существует у президента, если: а) один из вице-президентов (первый) выше другого по должности; б) вице-президенты по должности равны между собой.

Решение

Первый способ. а) Первого вице-президента можно выбрать из $l_1 = 10$ претендентов, при этом на пост второго вице-президента будут претендовать $l_2 = 9$ оставшихся директоров. Поэтому, согласно правилу произведения, у нового президента банка есть $l_1 l_2 = 10 \cdot 9 = 90$ способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров. б) Пусть первое действие заключается в том, что президент отбирает двух человек на должности вице-президентов, а второе действие - в том, что президент говорит отобранным людям, кто из них является первым вице-президентом, а кто - вторым. Пусть первое действие можно выполнить l_1 способами, второе действие, очевидно, можно выполнить $l_2 = 2$ способами, и по правилу произведения число способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров составляет $l_1 l_2 = 2l_1$. С другой стороны, в пункте а) мы нашли это число, и оно оказалось равным 90, поэтому $l_1 = \dfrac{90}{2} = 45$.

Второй способ. а) Число способов выбора двух кандидатов на две различные должности из десяти претендентов описывается числом размещений из 10 элементов по 2, т. е. $A_{10}^2 = 90$. б) Число способов выбора двух кандидатов на две одинаковые должности из десяти претендентов описывается числом сочетаний из 10 элементов по 2, т. е. $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$.

Упражнения

1. В кредитном отделе банка работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

2. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а другая 15. Определить, сколькими способами стороны могут обменять семерых военнопленных.

3. Петя и Маша коллекционируют видеокассеты. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши - 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя комедиями, двумя боевиками и одной мелодрамой?

4. В период сдачи итоговых контрольных работ в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать итоговых контрольных работ по пяти дисциплинам. Сколькими способами можно составить расписание сдачи итоговых контрольных работ , если: а) запрещается сдавать два сдачи итоговых контрольных работ в один день; б) между двумя сдачи итоговыми контрольными работами должен пройти хотя бы один день для подготовки?

5. Б банке девять учредителей. Регистрационные документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, и сколько ключей к ним нужно изготовить, чтобы доступ к содержимому сейфа был возможен только тогда, когда соберётся не менее шести учредителей?

6. Маша решила помириться с Петей и позвонить ему, но забыла две последних цифры его телефона и набирает их наудачу. Найти наибольшее возможное число неудачных попыток, которые сделает Маша, прежде чем дозвонится до Пети.

Пример 5. Маша очень любит пирожные и ежедневно в булочной рядом с институтом покупает шесть пирожных (одинаковых или разных). Всего в булочной продаётся 11 сортов пирожных. Сколькими способами Маша может выбрать из них шесть штук?

Решение

Каждому набору пирожных, которые выберет Маша, будем ставить в соответствие последовательность нулей и единиц, определяемую по следующему правилу. Напишем подряд столько единиц, сколько пирожных первого вида выбрала Маша, далее поставим нуль и после него запишем количество отобранных пирожных второго вида и т. д. Например, комбинации «одно пирожное второго вида, три пирожных пятого вида и одно пирожное восьмого вида» соответствует такая последовательность:

«010001110001000»

(нули отделяют виды пирожных друг от друга, поэтому нуль после одиннадцатого вида не нужен). При этом каждому набору пирожных взаимно однозначным образом соответствует последовательность, построенная по описанному правилу. Все такие последовательности состоят, очевидно, из 16 знаков, причём 10 из них нули, которые могут занимать любое место. Поэтому количество способов выбора пирожных равно количеству всех таких последовательностей, т.е. числу размещений десяти нулей по 16 местам: $C_{16}^{10} = 8008$.

Упражнение

В конкурсе по трём номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

Пример 6. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «мама»? Выписать все эти слова.

Решение

Число различных слов, которые можно составить, переставляя буквы в слове «мама», описывается числом перестановок с повторениями из $l = 4$ элементов (букв в слове «*мама*»), в которые первый элемент (буква «*м*») входит $l_1 = 2$ раза, а второй элемент (буква «*а*») - $l_2 = 2$ раза

$$\left(l_1 + l_2 = 4 = l\right).$$

Это число равно $\tilde{P}_4\left(2,2\right) = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$. Шесть различных слов, получающиеся перестановками букв в слове «мама», таковы: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*».

Упражнение

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*математика*»?

Примеры

1. В испытании, связанном с бросанием игральной кости, пространство элементарных исходов состоит из шести элементов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность того, что в результате опыта выпадет количество очков, большее двух, равна 4/6 четыре благоприятствующих элементарных исходов: 3, 4, 5, 6 $(m=4)$ и общее количество элементарных исходов $n=6$.

2. При игре в спортлото элементарным исходом является выбор шести различных чисел (шести нумерованных шаров) из множества 1, 2, 3,...,43, 44, 45. Так как шары, на которых обозначены цифры, одинаковы по физическим параметрам, то естественно считать, что все шестерки шаров равновероятны (и, значит, требование, предъявляемое к пространству элементарных исходов, выполнено). Пространством элементарных исходов является множество неупорядоченных наборов из 6 чисел $\{1,2,...,45\}$, состоящее из

$$C_{45}^{6}=\frac{45!}{(45-6)!6!}=8145060$$

элементов (общее количество различных шестерок равно 8145060).

Вероятности событий *A,* связанных с рассматриваемым испытанием, можно вычислить по формуле $p(A)=\frac{m}{n}$, где m - количество элементарных исходов, благоприятствующих событию *A,* т. е. количеству шестерок, означающих наступление события A. Тогда вероятность того, что в результате опыта появится заранее заданная шестерка чисел (т. е. вероятность угадать все шесть чисел), равна

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{8145060}=0,000000123.$$

3. Брошено две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события $A=$ {сумма выпавших очков делится на 6}.

Решение

Исход эксперимента (опыта) можно описать парой чисел $\omega_{ij}=(i,j)$, где i -число очков, выпавших на первой кости, а j - на второй $(i,j=1,2,...,6)$. Поэтому множество элементарных исходов

$$\Omega=\left\{\omega_{ij}=(i,j):i=1,2,...,6;\quad j=1,2,...,6\right\}.$$

Нетрудно проверить, что число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) - $n=36$. Другими словами общее число элементарных событий $n=36$. Событие A соответствует подмножеству

$$\{(1,5),\quad(5,1),\quad(2,4),\quad(4,2),\quad(3,3),\quad(6,6)\}\subset\Omega..$$

Другими словами

$$A=\{(1,5),\quad(5,1),\quad(2,4),\quad(4,2),\quad(3,3),\quad(6,6)\}\subset\Omega..$$

Так как число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) - $m=6$, то по формуле классической вероятности получаем

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

В этом примере помимо нахождения n - число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) и m - число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) нам удалось, полностью описать то из чего состоит множества Ω и A. Однако во многих случаях описания содержания этих множеств является практически невозможным. Следует отметить, что это и не является обязательным. Обязательным является нахождения чисел m и n. Нахождения этих чисел, следовательно, вычисления вероятностей в классической схеме часто облегчится, если применит элементы комбинаторики см. п.п. 4.1.

Еще заметим, что подсчет числа элементов тех или иных подмножеств множества Ω часто облегчается благодаря следующей формуле. Число элементов прямого произведения множеств равно произведению числа элементов составляющих множеств, т. е.

$$N(\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_s)=N(\Omega_1)N(\Omega_2)\cdots N(\Omega_s).$$

При решении вероятностных задач важно выделять опыты, где можно использовать те или иные комбинаторные формулы. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу k элементов из l различных элементов исходного множества $E=\{e_1,e_2,...,e_l\}$. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют **две принципиально различные схемы** выбора. **В первой схеме** выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все k элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). **Во второй схеме** выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т. е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие **четыре различные постановки опыта** по выбору наудачу k элементов из общего числа l различных элементов множества E.

Первая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Пример 4. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{$в полученной выборке ровно одно изделие бракованное$\}$,

$B=\{$в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия$\}$.

Решение

Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров $E_1 = \{1,2,...,7\}$ соответствует годным изделиям, а множество номеров $E_2 = \{8,9,10\}$ - бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества $E = E_1 \cup E_2 = = \{1,2,...,10\}$. Поэтому $n = C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента - множеству E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $m = C_3^2 \cdot C_7^2 = 63$, поэтому

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому $m = C_7^2 = 35$. Отсюда следует, что

$$p(B) = \frac{m}{n} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

Упражнения

1. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящих из трех букв. Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву *а*?

2. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

3. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий:

А ={в состав нового алфавита входит буква *о*},

В = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.

4. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий:

А = {будут выбраны одни третьекурсники},

В = {все первокурсники попадут на конференцию},

С = {не будет выбрано ни одного второкурсника}.

5. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 1 карты. Найти вероятности следующих событий:

А = {в полученной выборке все карты бубновой масти},

В = {окажется хотя бы один туз}.

б) Схема выбора, приводящая к размещениям

Пример 5. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой a?

Решение

n число всех 4-буквенных слов в данном опыте - равно числу 4- элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т. е.

$$n = A_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие $A=\{$наудачу составленное слово из 4 букв множества E оканчивается буквой $a\}$. Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ a исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m = A_9^3 = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$$

и

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

Упражнения

1. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$,

$B = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$,

$C = \{$числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания$\}$,

$D = \{$на четных местах будут стоять четные числа$\}$,

$E = \{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10$\}$.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.

3. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$появится число 123$\}$,

$B = \{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$,

$C = \{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$,

$D = \{$появится четное число$\}$,

$E = \{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3$\}$.

4. 10 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными},

$B =$ {варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам},

$C =$ {будут распределены последовательные номера вариантов}.

5. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?

Вторая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

Пример 6. В технической библиотеке имеются книги по математике, экономике, статистике и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий:

$A =$ {заказаны книги из различных разделов науки},

$B =$ {заказаны книги из одного и того же раздела науки}.

Решение

Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е.

$$n = C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, т.е. $m = C_{16}^4$, поэтому

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^4}{C_{19}^4} = \frac{455}{969} \approx 0,47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^1}{C_{19}^4} = \frac{4}{969} \approx 0,004.$$

Упражнения

1. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:
а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов.

2. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,n$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность p_n того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $n = 6$ (обычный набор домино) и $n = 9$ (расширенный набор).

б) Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

Пример 7. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Решение

Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7- буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку - шар № 7, в третью - шар № 3, в четвертую - шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7- буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т. е. $n = 4^7$.

Событие $A = \{$первая лунка окажется пустой$\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $m = 3^7$ и

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3^7}{4^7} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}133.$$

Упражнения

1. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий:

$A = \{$ни на одной кости не выпадет 6 очков$\}$,

$B = \{$хотя бы на одной кости выпадет 6 очков$\}$,

$C = \{$ровно на 3 костях выпадет 6 очков$\}$.

2. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита $E = \{$*а, б, к, о, м*$\}$ и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово «*мама*»?

3. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события $A = \{$вошедшему удастся открыть дверь за один час$\}$?

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий:

$A = \{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$,

$B = \{$все цифры различны$\}$,

$C =$ {номер начинается с цифры 5},

$D =$ {номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}.

5. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7- м этажах, найти вероятности следующих событий:

$A =$ {на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров},

$B =$ {трое пассажиров выйдут на седьмом этаже},

$C =$ {на каждом этаже выйдет по одному пассажиру},

$D =$ {все пассажиры выйдут на одном этаже}.

6. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {все автомобили поедут по одной и той же улице},

$B =$ {по определенной улице поедут ровно три автомобиля},

$C =$ { по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль}.

7. Из разрезной азбуки выкладывается слово математика. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «*математика*»?

8. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {каждый игрок получит туза},

$B =$ {один из игроков получит все 13 карт одной масти},

$C =$ { все тузы попадут к одному из игроков},

$D =$ {двое определенных игроков не получат ни одного туза}.

Пример. Два приятеля договорились встретиться в установленном месте в промежутке времени от 6 до 7 ч. По взаимному соглашению каждый приходит на место встречи в случайный наугад выбранный момент и ждет другого ровно 10 мин. Какова вероятность того, что приятели встретятся?

Решение. Пусть x и y означают моменты прихода на место встречи первого и второго приятеля соответственно. Такое событие удобно отметить точкой квадрата (рис.3). Условие встречи заключаются в том, что

$$|x - y| < \frac{1}{6} \tag{4}$$

(сторона квадрата соответствует часу времени, 10 мин составляет 1/6 ч).

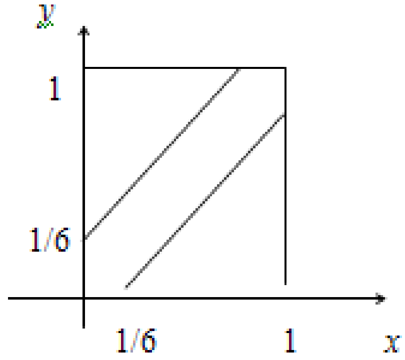


Рис.3

Множество точек, удовлетворяющих условию (4), отмечено на рисунке штриховкой. Площадь этого множества равна 11 /36. Согласно формуле (3), вероятность встречи

$$p = \frac{11/36}{(7-6)^2} = \frac{11}{36}.$$

Здесь применение формулы (3) обосновано следующими соображениями. По условию каждый из приятелей приходит на место встречи, выбирая момент прихода наугад.

Формула (3) естественным образом обобщается на случай пространства любой размерности.

Пусть $\Omega \subset R^n$. Для подмножества $A \subset \Omega$ определим значение p равенством

$$P(A) = \frac{mes(\mathrm{A})}{mes(\Omega)},$$

где $mes(A)$ – мера множества A (длина, площадь, объем и т.д. в зависимости от размерности того пространства, в котором рассматриваются данные множества).

Упражнения

1. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{(x, y):\ \max(x, y) < a,\ a > 0\}$,

$B = \{(x, y):\ \min(x, y) < a,\ 0 \le a \le 1\}$,

$C = \{(x, y): x^2 + y^2 < a,\ a > 0\}$,

$D = \{(x, y): xy < a,\ a > 0\}$.

2. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

3. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

4. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| \le 1,\ |b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны},

B = {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ положительны).

5. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x - время прихода Петра, y - время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). Найти вероятности событий:

B = {Петр пришел после Ивана),

D = {встреча не состоялась),

F = {Ивану не пришлось ждать Петра},

K ={встреча состоялась когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

7. Из отрезка [-1, 2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

8. **(Задача Бюффона).** На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных прямых, если $l < a$.

II.

Примеры

1. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Из урны извлекают последовательно (без возвращения) два шара. Событие A состоит в том, что первым будет взят белый шар, а событие B - в том, что второй шар окажется черным. Найти вероятность произведения (т.е. совместного наступления) событий A и B.

Решение

В силу теоремы умножения вероятностей имеем

$$p(AB) = p(A)\,p_A(B).$$

Очевидно, что $p(A) = \dfrac{2}{5}$. Так как после извлечения белого шара в урне осталось 4 шара -1 белый и 3 черных, то при этих условиях вероятность извлечения черного шара $p_A(B) = \dfrac{3}{4}$. Итак, $p(AB) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

2. Какова вероятность выпадения двух гербов при двукратном бросании монеты?

Решение

Пусть A - выпадение герба при первом бросании, а B - выпадение герба при втором бросании; тогда $p(AB)=p(A)\,p(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Аналогично, применяя теорему умножения несколько раз, получаем: вероятность того, что при n бросаниях монеты герб выпадает n раз, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Замечание. Выразим условную вероятность из соотношения (1), считая $p(A)\neq 0$:

$$p_A(B)=\frac{p(AB)}{p(A)}. \tag{3}$$

Пример 1. Все грани игральной кости заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – красной, грани 4, 5, 6 – черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

Решение

Очевидно, мы должны найти условную вероятность $p_A(B)$, где события B есть выпадение четного числа очков, а событие A – выпадение числа очков, большего 3. Имеем:

$$p_A(B)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}.$$

Для сравнения отметим, что безусловная вероятность события B (просто $P(B)$) равна $1/2$.

Пример 2. Из колод игральных карт наугад выбирают одну карту. Пусть событие A заключается в том, что вынутая карта является «тузом», а события B – в том, что карта красной масти («бубновая» или «червовая»). Интуитивная ясно, что A не зависит от B (цена карты не зависит от масти). Проверим это подсчетом. Так как

$$p(A)=\frac{4}{36},\quad p(B)=\frac{18}{36},\quad p(AB)=\frac{2}{36},$$

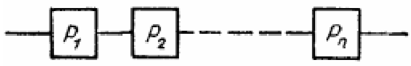
то равенство (2) выполняется. Следовательно, события A и B независимы.

В практических вопросах для установления независимости одного события от другого редко прибегают к проверке равенства (2). Обычно при этом довольствуются интуитивными соображениями. Так, например, если бросают подряд две монеты, то ясно, что выпадение той или другой стороны на одной монете не оказывает никакого влияния на условия бросания другой, и, значит, следующие два события: выпадение герба на одной монете (событие A) и выпадение герба на другой (событие B) - являются независимыми.

Пример 3. Монета брошена 3 раза. Пусть A, B, C - события, состоящие в появлении герба соответственно в первом, втором и третьем испытаниях. Ясно, что каждые два из рассматриваемых событий (т. е. A и B, A и C, B и C) - независимы.

Таким образом, события A, B и C - попарно независимые.

Пример 4. Электрическая схема состоит из ***n*** последовательно соединенных блоков.



Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого блока равна соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схеме в целом.

Решение

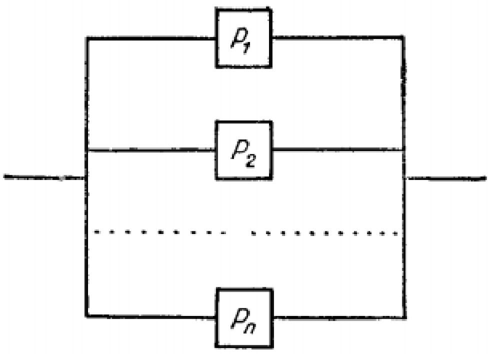
Событие, заключающееся в исправной работе *i*-го блока, обозначим A_i; исправность схемы в целом обозначим A. Так как блоки собраны последовательно, то A имеет место в том и только в том случае, когда имеют место все A_i. Поэтому

$$A = A_1 A_2 \ldots A_n,$$

откуда в силу независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует

$$p(A) = p(A_1)\,p(A_2)\ldots p(A_n) = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Та же самая задача для схемы из параллельно соединенных блоков приводит к другому результату.



В этом случае выход схемы из строя происходить лишь в том случае, когда выходят из строя все блоки. Это значит, что

$$\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$$

и, следовательно,

$$p(\bar{A}) = p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)...p(\bar{A}_n) = (1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n).$$

Таким образом, надежность всей схемы оказывается равной

$$p(A) = 1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-\mathrm{p}_n).$$

Пример 5. Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто».

Решение. Введем обозначение для событий:

$$A_1 = \{\text{первой извлечена буква } \ll c \gg\};$$

$$A_2 = \{\text{второй извлечена буква } \ll \text{т} \gg\};$$

$$A_3 = \{\text{третьей извлечена буква } \ll o \gg\};$$

$$A = \{\text{получилось слово} \ll \text{сто} \gg\}.$$

Очевидно, $A = A_1A_2A_3$. Имеем последовательно:

$$p(A_1) = \frac{1}{5}; \ \ p(A_1A_2) = p(A_1)p_{A_1}(A_2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20};$$

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1A_2)p_{A_1A_2}(A_3) = \frac{1}{20}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

Итак, $p(A) = \frac{1}{30}$.

Пример 6 . Стрелок производит по мишени 2 выстрела. Следующие события A_1, - одно попадание; A_2 - два попадания; A_3 – промах образуют полную группу.

Для событий, образующих полную группу, имеет место следующая

Пример 7. Вероятность того, что день будет ясный равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет дождливый.

Решение

По условию $p = 0,7$. Тогда как $q = 1-p$. Т.е. $q = 1-0,7 = 0,3$.

Очень часто при решении задач на нахождение вероятности события A бывает удобно найти прежде вероятность противоположного события $\bar{A}$, а затем вероятность искомого события по формуле:

$$p(A) = 1-p(\bar{A}).$$

Пример 8. Студент из 50 экзаменационных вопросов знает ответ на 30 вопросов. Какова вероятность того, что из заданных ему на удачу 5 вопросов он знает ответ хотя бы на один вопрос?

Решение

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос. Тогда событие $\overline{A}$ - студент не знает ответа ни на один вопрос - противоположное событие. Вероятность события $\overline{A}$ легко находится по классическому определению вероятности:

$$p(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Тогда искомая вероятность

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Пример 9. В продукции завода брак составляет 5 % от общего количества выпускаемых деталей. Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что среди них имеется хотя бы одна бракованная?

Решение

Для любой детали из продукции завода вероятность быть бракованной равна по условию $p = 0,05 = p\left(A_k\right),\ k = 1,2,...,20,$ где событие

$A_k = \{\ k$ -я по счету извлеченная деталь бракованная$\}$.

Очевидно, нас интересует событие $A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}$. В условиях отлаженного технологического процесса можно считать, что события $A_1, A_2, ..., A_{20}$ независимы в совокупности. Тогда очевидно, что вероятность осуществления хотя бы одного $A_1, A_2, ..., A_{20}$ проще вычисляется не по формуле сложения , а с помощью формулы умножения:

$$p\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}\right) =$$

$$= 1 - p\left(\overline{A_1}\right) p\left(\overline{A_2}\right) \cdots p\left(\overline{A_{20}}\right) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,64.$$

Упражнения

1. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 - французский и 35 - немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий - 8, французский и немецкий - 10. Все. три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Вычислить вероятности следующих событий:

A = {вышедший знает или английский или французский язык},

B = {вышедший знает только английский язык},

C = {вышедший не знает ни одного языка}.

2. Статистика, собранная среди студентов кредитно-экономического факультета Ташкентского финансового института, обнаружила следующие факты: 60 % всех студентов занимаются спортом, 30 % участвуют в художе-

ственной самодеятельности, 50 % работают в банке, 20 % занимаются спортом и участвуют в художественной самодеятельности, 10 % занимаются спортом и работают в банке, 5 % участвуют в самодеятельности и работают в банке, наконец, 5 % участвуют во всех трех видах деятельности. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятности следующих событий:

A = {студент занимается по крайней мере одним из двух видов деятельности: занимается спортом или участвует в художественной самодеятельности};

B = (студент занимается одним только спортом},

C = {студент занимается только одним видом деятельности};

D = {студент занимается двумя и только двумя видами деятельности}.

3. **(Задача де Мере).** Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5 хотя бы один раз появилась сумма очков, рарная 12?

Пример 10. Производится серия из четырех выстрелов по некоторому объекту. Вероятности попадания в цель одного, двух, трех и четырех снарядов заданы таблицей

1	2	3	4
0,4	0,26	0,22	0,03

Вероятности разрушения объекта при условии попадания одного, двух, трех и четырех снарядов даны в таблице

1	2	3	4
0,5	0,7	0,8	0,99

Найти вероятность разрушения объекта.

Решение

Первая таблица задает вероятности $p(B_1), p(B_2), p(B_3), p(B_4)$, а вторая - вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), p_{B_3}(A), p_{B_4}(A)$ (событие B_i состоит в попадании в цель i (i=1, 2, 3, 4) снарядов, событие A состоит в разрушение мишени). По формуле (1) находим

$$p(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}26 \cdot 0{,}7 + 0{,}22 \cdot 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 0{,}99 = 0{,}5877.$$

Пример 11. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - государственные органы, 20% - другие банки, остальные - физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0,2;\quad p(B_2)=0,2;\quad p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0,7\,\mathrm{P}\{H_1\}=0,1,$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0,01;\quad p(B_2)=0,005;\quad p(B_3)=0,2.$$

По формуле полной вероятности

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)=$$
$$=0,01\cdot 0,1+0,05\cdot 0,02+0,2\cdot 0,7=0,151.$$

Упражнения

1. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80 % всего времени полета, условия перегрузки - в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки - 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

3. На шахматную доску ставят наудачу двух слонов, белого и черного. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?

4. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10 % и третьего - 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % - со второго и 50 % - с третьего?

5. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

6. Три стрелка, вероятности попадания которых при одном выстреле в мишень в неизменных условиях постоянны и соответственно равны $p_1=0,8$,

$p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,6$, делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вычислить вероятность события А = {в мишени окажется ровно две пробоины}, приняв в качестве гипотез элементарные исходы данного опыта.

7. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

8. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй - 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара, и шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и тщательно перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

Пример 12. Поломка прибора (событие A) может быть вызвана одной из трех причин B_1, B_2, B_3, вероятности которых $p(B_1)$= 0,7, $p(B_2)$=0,2, $p(B_3)$ = 0,1. При наличии этих причин поломка прибора происходит с вероятностями $p_{B_1}(A) = 0,1$, $p_{B_2}(A) = 0,2$, $p_{B_3}(A) = 0,2$. Известно, что прибор вышел из строя. Найти вероятности $p_A(B_1)$, $p_A(B_2)$, $p_A(B_3)$.

Решение. Используя формулы (8), получим

$$p_A(B_1) = \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,07}{0,13} = \frac{7}{13};$$

$$p_A(B_2) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,04}{0,13} = \frac{4}{13};$$

$$p_A(B_3) = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,02}{0,13} = \frac{2}{13}.$$

Из результатов вычислений видно, что апостериорные вероятности отличаются от априорных.

Пример 13. В условиях примера 11 начальнику кредитного отдела доложили, что получено факсимильное сообщение о неисполнении обязательств по возврату кредита, в котором очень плохо пропечаталось имя клиента. Найти вероятность того, что кредит не возвращает какой-либо банк.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0,2;\quad p(B_2)=0,2;\quad p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0,7\,\mathrm{P}\{H_1\}=0,1\,,$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0,01;\quad p(B_2)=0,05;\quad p(B_3)=0,2.$$

По формуле Байеса полной вероятности

$$p_A(B_2)=\frac{p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}{p(A)}=\frac{10}{151}\approx 0,66,$$

где вероятность $p(A)=0,151$ рассчитана по формуле полной вероятности в примере 10.

Пример 14. Страховая компания занимается страхованием жизни. 10% застрахованных в этой компании являются курильщиками. Если застрахованный не курит, вероятность его смерти на протяжении года равна 0,01. Если же он курильщик, то эта вероятность равна 0,05.

Какова доля курильщиков среди тех застрахованных, которые умерли в течение года?

Решение

Введем события:

$B_1=$ {застрахованный - курильщик};

$B_2=$ {застрахованный - не курильщик};

$A=$ {застрахованный умер в течение года}.

Условие задачи означает, что

$$p(B_1)=0,1;\quad p_{B_2}(A)=0,05;\quad p_{B_3}(A)=0,01.$$

Кроме того, поскольку события B_1 и B_2 образуют полную группу попарно несовместимых событий, $p(B_2)=1-p(B_1)=1-0,1=0,9.$

Интересующая нас вероятность – это $p_A(B_1)$. Используя формулу Байеса, мы имеем:

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}=\frac{0,1\cdot 0,05}{0,1\cdot 0,05+0,9\cdot 0,01}=\frac{5}{14}\approx 0,36.$$

Упражнения

1. Страховая компания продает договора страхования жизни трех категорий: стандартные, привилегированные и ультрапривилегированные. 50% всех застрахованных являются стандартными, 40% - привилегированными и 10% - ультрапривилегированными. Вероятность смерти в течение года для стандарного застрахованного равна 0,010, для привилегированного - 0,005, а для ультрапривилегированного [1] - 0,001.

Чему равна вероятность того, что умерший застрахованный является ультрапривилегированным ?

2. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

3. Изучается три вида дефектов запоминающих устройств, выполненных на интегральных схемах: дефекты схем обрамления (гипотеза B_1); дефекты, вызванные паразитными связями между ячейками (гипотеза B_2); и дефекты адресных шин (гипотеза B_3). Известно, что

$$p(B_1)=0,1;\ p(B_2)=0,6;\ p(B_3)=0,3.$$

Диагностика запоминающих устройств производится с помощью набора тестов $T_1, T_2, ..., T_n$, каждый из которых проверяет определенное состояние ячейки памяти. Наблюдаемый результат - состояние выбранной ячейки по отношению к каждому тесту. Пусть диагностика произведена и наблюдался некоторый результат (произошло событие А). Известно до опыта, что

$$p_{B_1}(A)=0,4,\ p_{B_2}(A)=0,2,\ p_{B_3}(A)=0,3.$$

Установить, какая из гипотез имеет наибольшую апостериорную вероятность (т.е. какой из дефектов наиболее вероятен).

4. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 20% с заболеванием M, 30% с заболеванием L. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7, для болезней L и M эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

5. Продукция, изготавливаемая в цехе, проверяется двумя контроле-

[1] Привилегированность договора/застрахованного означает меньший риск для страховой компании (по результатам андеррайтинга).

рами. Вероятность того, что деталь попадет на проверку к первому контролеру равна 0,6; ко второму контролеру 0,4. Вероятность принять качественную деталь за бракованную равна для первого контролера 0,06, для второго контролера эта вероятность 0,02. Среди забракованных деталей оказалась качественная. Найти вероятность того, что она проверялась первым контролером.

6. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй – 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый.

7. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго 0,2%, с третьего 0,25%, с четвертого 0,5%. Производительности их относятся соответственно как 4:3:2:1. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

8. В коробки находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появилась с вероятностью ⅓, единица с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена, и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

9. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятности, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные – 20, подготовленных удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез:

$H_1 = \{$студент подготовлен отлично или хорошо$\}$;

$H_2 = \{$студенты подготовлены удовлетворительно$\}$;

$H_3 = \{$студент подготовлен плохо$\}$.

III.

Примеры. Следующие серии опытов представляют собой конкретные модели схемы Бернулли:

1. Монету подбрасывают n раз; вероятность появления герба в одном испытании есть $p=1/2$.

2. Производят n выстрелов по мишени. Предполагается, что вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна p.

Отметим, однако, что если в процессе стрельбы стрелок пристрелялся и стал лучше поражать мишень, то такая последовательность испытаний не является схемой Бернулли.

3. Из кучи зерна отбирают n зерен для проверки их на всхожесть. Вероятность того, что каждое зерно при проверке дает положительный результат, постоянна (так будет, например, в том случае, когда куча зерна большая, а зерна отбирают наугад после перемешивания).

Примеры

1. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты выпадет ровно 3 герба.

Решение

Здесь $n=10,\quad k=3,\quad p=\dfrac{1}{2}$. Согласно формуле Бернулли, получим

$$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{120}{1024}.$$

2. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $1/3$. Найти вероятность того, что из 6 выстрелов три поразят мишень.

Решение

Используя формулу Бернулли при $n=6,\ k=3,\ p=\dfrac{1}{3},\ q=\dfrac{2}{3},$ находим

$$P_{6}(3)=C_{6}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8}{729}=\frac{160}{729}.$$

3. Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 7 отобранных зерен ровно 5 окажутся всхожими?

Решение

Имеем

$$P_{7}(5)=C_{7}^{5}\,0{,}9^{5}\cdot 0{,}1^{2}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21\cdot 0{,}0059049=0{,}124.$$

4. В схеме Бернулли, связанной с бросанием монеты, вычислить вероятности $P_{10}(k)$, где k = 0, 1, 2, ..., 10 (т.е. вероятности того, что в 10 испытаниях герб выпадет ровно k раз).

Решение. Используя формулу Бернулли при $p = q = \frac{1}{2}$, $k = 0,1,2,...,10$, получим

$$P_{10}(0) = \frac{1}{1024},\ P_{10}(1) = \frac{10}{1024},\ P_{10}(2) = \frac{45}{1024},\ P_{10}(3) = \frac{120}{1024},\ P_{10}(4) = \frac{210}{1024},$$

$$P_{10}(5) = \frac{252}{1024},\ P_{10}(6) = \frac{210}{1024},\ P_{10}(7) = \frac{120}{1024},\ P_{10}(8) = \frac{45}{1024},\ P_{10}(9) = \frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(10) = \frac{1}{1024}.$$

Результаты вычислений иллюстрирует рис.1. Как видно из рисунка, наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5) \approx 0,25$. Сравнительно велики и значения $P_{10}(4)$ и $P_{10}(6)$ $(\approx 0,21)$; в то же время «крайние» значения k дают $P_{10}(0) = P_{10}(10) \approx 0,001$.

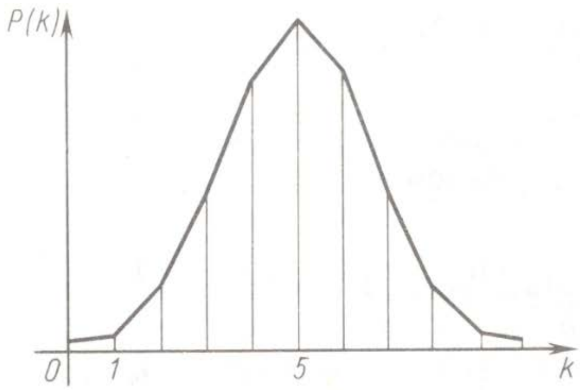


Рис. 1

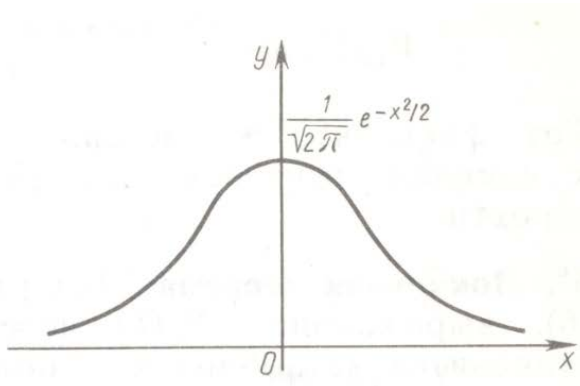


Рис. 2

Обратим внимание на характерный вид изображенной на рисунке ломаной, имеющей пик в точке $k = 5$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с кривой $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (рис.2.). Она называется гауссовой кривой (или кривой нормального распределения) и играет исключительно важную роль в теории вероятностей.

Тот факт, что ломаная на рис. 1 и кривая на рис. 2 имеют значительное сходство, не случаен. Причины этого явления раскрываются локальной теоремой Муавра-Лапласа.

Для вычисления вероятностей $P_n(k_1, k_2)$ того, что в схеме Бернулли из n испытаний количество m наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le m < k_2$, можно использовать формулу

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2 - 1). \qquad (1)$$

Событие, о котором идет речь, является суммой попарно несовместных событий B_i $(i = k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1)$, состоящих в том, что в n испытаниях событие A наступит ровно i раз; затем, используя теорему сложения вероятностей, получаем формулу (1).

В частности, вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$
$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

Пример. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, $n = 15,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p\ .$$

Подставив данные задачи, получим

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9, \text{ или } 13{,}5 < k_0 < 14{,}4.$$

Так как k_0 - целое число и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 14$.

Пример. Найти наивероятнейшее число появления герба в 10 испытаниях. (см. пример 4 из п.2)

Решение

$np - q$ = 10· 0,5 – 0,5 = 4,5 – дробное число; существует одно наивероятнейшее число k_0. Имеем $4{,}5 \le k_0 \le 5{,}5$. Следовательно, $k_0 = 5$. Нетрудно заметить, что расчеты проведенные в п.2. это подтверждает, т.е., наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5) \approx 0{,}25$.

Пример. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Вероятность того, что наугад выбранный зритель данной телепрограммы смотрит и рекламные блоки, согласно статистическому определению вероятности, равна $p=0,7$. Интерпретируя опрос трёх телезрителей как три испытания Бернулли и считая наступил событие A ситуацию, когда телезритель смотрит рекламные блоки, найдём искомые вероятности по формуле Бернулли

$$P_3(k)=C_3^k 0,7^k\cdot 0,3^{3-k}\quad (k=0,1,2,3),$$

в которой $n=3$, $p=3$. Отсюда имеем:

$$P_3(0)=C_3^0 0,7^0\cdot 0,3^3=0,027;\qquad P_3(1)=C_3^1 0,7^1\cdot 0,3^2=0,189;$$

$$P_3(2)=C_3^2 0,7^2\cdot 0,3^1=0,441;\qquad P_3(3)=C_3^3 0,7^3\cdot 0,3^0=0,343.$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти наивероятнейшее число лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Наивероятнейшее число k_0 лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки, подчиняется неравенствам

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

в которых $n=3$, $p=3$, т.е.

$$3\cdot 0,7-0,3\le k_0\le 3\cdot 0,7+0,7 \text{ или } 1,8\le k_0\le 2,8,$$

откуда $k_0=2$. Это подтверждается и решением предыдущего примера.

Упражнения

1. Стоимость проезда в автобусе равна 3, месячный проездной билет на автобус стоит 120, а штраф за безбилетный проезд составляет 10. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

2. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).

3. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.

4. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?

5. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

6. В течение месяца данная акция может подорожать на 1% с вероятностью 0,7 и подешеветь на 1% с вероятностью 0,3. Предполагая ежемесячные изменения цены независимыми, рассчитать вероятности того, что за три месяца цена акции возрастет: а) в $(1{,}01)^3$ раза; б) в $0{,}99\cdot(1{,}01)^2$ раза.

7. Из 1000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

8. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Найти минимальное число билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету.

9. В городе работают 1000 коммерческих банков, из которых 330 допускают нарушения налогового законодательства. Определить число банков, которые должна отобрать для проверки налоговая инспекция, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среди них оказался хотя бы один нарушитель законодательства.

10. В условиях задачи 9 налоговая инспекция проводит проверку 12 банков, выбирая их случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в ходе этой проверки будет выявлен хотя бы один нарушитель налогового законодательства.

11. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

12. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.

Пример. (Задача о разделе ставки[2]). Петя и Маша часто играют в бильярд друг с другом, причём Петя выигрывает в два раза чаще, чем Маша.

---

[2] Такая задача возникает при определении доли инвестора, который хочет «выйти» из незавершенного проекта.

Исходя из этого, они оценили свои вероятности победить как $\frac{2}{3}$ для Пети и $\frac{1}{3}$ для Маши и начали турнир на следующих условиях: каждый выигрыш приносит одно очко, Петя для победы должен набрать двенадцать очков, а Маша - шесть. После того, как Петя набрал восемь очков, а Маша - четыре, игру пришлось прекратить, и победу решили присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Определить, кому присудили победу в этом турнире.

Решение

Очевидно, максимальное количество партий, которое осталось сыграть Пете и Маше, равно пяти (либо Петя выиграет три раза, а Маша - два раза, либо Маша выиграет один раз, а Петя - четыре раза). Поэтому событие, заключающееся в выигрыше Пети (а значит, проигрыше Маши), состоит в том, что Маша из пяти партий не выиграет ни одной или выиграет всего одну. Поэтому вероятность выигрыша Пети равна вероятности того, что в пяти испытаниях Бернулли, в каждом из которых успех интерпретируется как выигрыш Машей очередной партии (т.е. вероятность успеха в каждом испытании составляет $p=\frac{1}{3}$), наступит 0 или 1 успех:

$$P\{\textit{выигрыш Пети}\}=P\{0 \textit{ или } 1 \textit{ выигрыш Маши из } 5 \textit{ партий}\}=$$

$$=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5+C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{112}{243}.$$

При этом

$$P\{\textit{выигрыш Маши}\}=P\left\{\overline{\{\textit{выигрыш Пети}\}}\right\}=$$

$$=1-P\{\textit{выигрыш Пети}\}=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}.$$

Поэтому в данном случае победу должны были присудить Маше.

Пример (Задача Банаха). Известный математик Стефан Банах всегда носил с собой две коробки спичек, в каждой из которых первоначально было n спичек. Каждый раз, когда он хотел зажечь спичку, Банах доставал наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он в первый раз вынимал пустую коробку, в другой коробке оказывалось ровно r спичек, где $r=0,1,\ldots,n$.

Решение

Спички брались всего $(2n-r)$ раз, причём n раз из коробки, оказавшейся пустой. Это соответствует n успехам в $(2n-r)$ независимых испытаниях, поэтому вероятность

$$p(A)=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}.$$

Упражнение

Доказать формулу $np-q\le k_0\le np+p$ для наивероятнейшего числа наступления события в независимых испытаниях.

Пример. В урне содержится 8 белых, 5 красных и 2 черных шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Рассматриваются события:

$A=\{$появился следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов$\}$;

$B=\{$появилось ровно 3 белых шара$\}$;

$C=\{$появилось 3 белых шара и по одному остальных цветов; причем белые шары появились подряд$\}$.

Определить их вероятности.

Решение

Событие A соответствует полиномиальной схеме при $n=5$, $r=3$, $p_1=8/15$, $p_2=5/15$, $p_3=2/15$, поэтому

$$p(A)=P_5(3,1,1)=\frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\approx 0{,}1348.$$

Событие B соответствует полиномиальной схеме при $n=5$, $r=2$, $p_1=8/15$, $q_1=7/15$, поэтому

$$p(B)=P_5(3)=C_5^3\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{7}{15}\right)^2=10\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2\approx 0{,}3304.$$

Событие C соответствует комбинированной схеме, в которой в каких-либо трех последовательных испытаниях белый шар выпал трижды, а в остальных двух испытаниях по одному разу выпали черный и красный шары, поэтому

$$p(C)=3\cdot P_3(3)\cdot P_2(0,1,1)=3\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\frac{2!}{0!1!1!}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^0\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{2}{15}\approx 0{,}0404.$$

Упражнения

1. Каждый из десяти аспирантов группы случайным образом и независимо от остальных выбирает один из четырех дней наступающей недели (по-

недельник, вторник, среду или четверг) для работы в библиотеке в отделе текущей периодики. Найти вероятности следующих событий:

A = (в понедельник в библиотеку явится один аспирант, во вторник - два, в среду - три, в четверг – четыре аспиранта);

B = {все десять аспирантов соберутся в библиотеке в четверг};

C = {пятеро из аспирантов появятся в библиотеке в первые два дня недели и пятеро - в следующие два дня},

D = {в понедельник в библиотеке появятся ровно три аспиранта}.

2. Два равносильных шахматиста играют матч из 12 партий. В каждой партии возможно три исхода: $\omega_1 =$ {выиграл первый игрок (проиграл второй)}; $\omega_2 =$ {ничья}; $\omega_3 =$ {выиграл второй (проиграл первый)}. Пусть

$$p(\omega_1) = p(\omega_3) = 0,2; \qquad p(\omega_2) = 1 - p(\omega_1) - p(\omega_3) = 0,6.$$

Найти вероятности следующих событий:

A = {первый игрок выиграл 3 партии, проиграл 3 партии и остальные свел вничью};

B = {один из игроков выиграл 4 партии и проиграл 3 партии};

C = {сыграно 6 результативных партий}.

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты герб выпадет: а) ровно 50 раз; б) ровно 60 раз.

Решение

а) Здесь $n = 100$, $k = 50$, $p = 0,5$, $q = 0,5$. Используя формулу (1), получим

$$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \varphi(x) = \varphi(x) \cdot \frac{1}{5}, \text{ где } x = \frac{50 - 0,5 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0.$$

Следовательно, $P_{100}(50) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{5} 0,3989 = 0,079$ (значение $\varphi(0)$ найдено по таблице).

б) Аналогично находим $P_{100}(60) = \frac{1}{5} \varphi(x)$, где $x = \frac{60 - 0,5 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0, \cdot 0,5}} = \frac{10}{5} = 2$.

Таким образом, $P_{100}(60) = \frac{1}{5} \varphi(2) = \frac{1}{5}$ 0,0540 = 0,0108.

Пример. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

Решение

Данную ситуацию можно рассматривать как серию из $n=100$ испытаний Бернулли, в которых появления события в каждом испытании считается принятие банком решения о кредитовании. Вероятность появления события в единичном испытании равна по условию $p=0,3$. Поскольку число испытаний n велико можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа.

$$P_{100}(1)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot 0,7}}\cdot\varphi\left(\frac{1-100\cdot 0,3}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot 0,7}}\right)=\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\varphi\left(\frac{1-30}{\sqrt{21}}\right)=$$

$$=0,22\cdot\varphi(-6,33)\approx 0,22\cdot 0=0;$$

$$P_{100}(15)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{15-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\varphi(-3,27)\approx 0,22\cdot 0,0020=0,00044;$$

$$P_{100}(30)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\varphi\left(\frac{30-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\cdot\varphi(0)\approx 0,22\cdot 0,03989=0,088;$$

$$P_{100}(50)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\varphi\left(\frac{50-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\cdot\varphi(4,36)\approx 0,22\cdot 0=0.$$

Упражнение

Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит ровно 75 раз.

Из формулы (3) вытекает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с графиком функции $f=\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, k -целое число. Это означает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с гауссовской кривой $y=\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, сдвинутой вправо на np и сжатой по вертикали в $\sqrt{npq}$ раз. При этом график $P_n(k)$ обладает характерной чертой - наличием пика в точке $k\approx np$ (рис. 3). В учебниках по теории вероятностей можно встретить более строгую формулировку локальной теоремы Муавра - Лапласа.

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты количество гербов будет находиться в следующих пределах:

а)[45;55]; б) [40;60]; в)[35;65].

Решение

Здесь $p = 0,5$, $q = 0,5$, $n = 100$, $\sqrt{npq} = \sqrt{100.0,5.0,5}$ =5.

а) $k_1^/ = \dfrac{45-50}{5}$=-1, $k_2^/ = \dfrac{55-50}{5}$ =1; P_{100} (45,55) ≈ Ф(1) -Ф(-1) = 2Ф(1) = = 0,6826.

б) $k_1^/ = \dfrac{40-50}{5}$= -2, $k_2^/ = \dfrac{60-50}{5}$ =2; P_{100} (40,60) ≈ Ф(2)-Ф(-2) = 2Ф(2) = = 0,9545.

в) $k_1^/ = \dfrac{35-50}{5}$= -3; $k_2^/ = \dfrac{65-50}{5}$ =3; P_{100} (35,65) ≈ Ф(3)-Ф(-3) = 2Ф(3) = = 0,9973.

Из результатов вычислений видно, что вероятности рассматриваемых событий достаточно велики, в особенности последняя вероятность, равняя 0,9973.

События, имеющие большую вероятность, называются практически достоверными.

В этом случае считается, что в результате опыта событие обязательно наступит. Насколько должна быть велика вероятность, чтобы событие считать практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверным содержит «элемент риска». Ясно, что в различных условиях допустимый риск различен. Все же часто останавливаются на вероятности 0,9973. Мы также примем за определение практически достоверного события такое случайное событие, вероятность которого не меньше, чем 2Ф(3)= 0,9973.

Пример. Некоторая система состоит из 10000 (независимых) элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна 0,5. Пусть n — количество вышедших из строя элементов системы. Найти трехсигмовый интервал.

Решение. Имеем n =10000, $p = 0,5$, $q = 0,5$ $\sigma = \sqrt{10000.0,5.0,5} = 50$, $k_1 = np - 3\sigma$ = 5000 -150, $k_2 = np + 3\sigma$ = 5000+150. Итак, с вероятностью 0,9973 можно утверждать, что количество вышедших из строя элементов находится в пределах 5000+150 (событие ***практически достоверное***).

В частности, если взять запас в 5000 элементов для замены вышедших из строя, то в 50% случаев этого запаса не хватит. Если же увеличить этот запас всего на 3%, т. е. взять 5150 элементов, то его хватит наверняка (т. е. с вероятностью большей, чем 0,9973). Оценка трехсигмового интервала этого примера «на глаз», «по здравому смыслу» приводит, как правило, к большому преувеличению истинного значения.

С помощью интегральной теоремы Муавра - Лапласа можно пояснить, почему и в каком смысле вероятность p события A в одном испытании совпадает (приближенно) с частотой $\frac{m}{n}$ наступления события A в n испытаниях. Действительно, с вероятностью 0,9973 выполняется неравенство np - 3 $\sqrt{npq} \leq m < np + 3\sqrt{npq}$, откуда после деления всех его частей на n получим

$$p - 3\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \frac{m}{n} < p + 3\sqrt{\frac{pq}{n}} .$$

Так как $3\sqrt{\frac{pq}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$, то частота $\frac{m}{n}$ с практической достоверностью при больших n так угодно мало отличается от p.

Следствие. Вообще говоря, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа легко можно получить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях в более общем случае, т.е. формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию $n = 400$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}03$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \leq 0{,}03\right)$.

Пользуясь формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \leq 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице значений функции Лапласа находим $2\Phi(2) = 0{,}9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p = 0{,}1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью равной 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение

По условию

$$p = 0{,}1; \quad q = 0{,}9; \quad \varepsilon = 0{,}03\,; \; P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 0{,}9544\,.$$

Требуется найти n .

Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В силу условия,

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) = 2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}9544.$$

Следовательно, $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772 =$ 0,4772. По таблице значений функции Лапласа находим

$$\Phi\left(2\right) = 0{,}4772\,.$$

Для отыскания числа n получаем уравнение

$$0{,}1\sqrt{n} = 2.$$

Отсюда искомое число деталей $n = 400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95, 44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03, т.е. относительная частота будет заключена в границах от 0,07 (0,1 - 0,03 = 0,07) до 0,13 (0,1 + 0,03 = 0,13).

Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено от 28 (7% от 400) до 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28, либо больше 52.

Более строгая формулировка утверждения о близости частоты и вероятности дана в теореме Бернулли (один из вариантов закона больших чисел), которую рассмотрим в одном из последующих параграфах.

Пример. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 100000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой (4). Найдём $\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Тогда

$$P_{100000}(5) = e^{-10}\frac{10^5}{5} = 10^5 \cdot \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Пример. На лекции по теории вероятностей присутствует 200 человек. Вероятность того, что день рождения случайно выбранного студента приходится на определённый день года, составляет 1/36. Найти вероятность того, что один человек из присутствующих родился 1 января, и два человека родились 8 марта.

Решение

Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный студент родился 1 января, событие N - в том, что k человек из 200 родились 1 января. Тогда по условию $p = P(A) = \frac{1}{365}$. Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np = \frac{200}{365} = 0{,}548$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{200}(k) \approx e^{-0{,}548}\frac{(0{,}548)^k}{k!}$$

и при $k = 1$ получаем

$$P_{200}(k) \approx e^{-0{,}548}(0{,}548) = 0{,}317.$$

Пусть событие M - в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $p(NM)=p(N)p_N(M)$, где $p_N(M)=P_{n-k}(m)$- вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $(n-k)=200-1=199$ велико, а $(n-k)p=\frac{198}{365}=0,542$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{n-k}(m) \approx e^{-0,542}\frac{(0,542)^m}{m!}.$$

При $n=200$, $k=1$, $m=2$ получаем

$$p_N(M)=P_{199}(2)=e^{-0542}\frac{(0,542)^2}{2}=0,086,$$

поэтому искомая вероятность $p(NM)=0,317\cdot 0,086=0,027.$

Упражнения

1. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

2. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко - вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.